BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Р.АЛИЕВ[1,2], С.Ф.БАБАЕВА[1]
[1]Бакинский Государственный Университет,
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
e-mail: alievaraz@yahoo.com, seva_babaeva@mail.ru

В данной работе рассматривается краевая задача для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка, где одно из краевых условий возмущено некоторым оператором. Приведены достаточные условия на операторные коэффициенты уравнения и краевых условий, при которых рассматриваемая задача корректно и однозначно разрешима.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$u'''(t)-A^3u(t)=f(t),\ t\in R_+=[0;+\infty), \tag{1}$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=Ku, \tag{2}$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ [1] и операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A – положительно-определенный самосопряженный оператор;
2) оператор $K\in L(W_2^3(R_+;H),H_{3/2})$, т.е. $\|Ku\|_{H_{3/2}}\le\kappa\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}$.

Здесь $H_\gamma=D(A^\gamma)$, $(\gamma\ge0)$, $(x,y)_{H_\gamma}=(A^\gamma x,A^\gamma y)$, а $L(X,Y)$ – пространство ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространство Y,

$$L_2(R_+;H)=\left\{f(t):\|f\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|f(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}<+\infty\right\},$$

$$W_2^3(R_+;H)=\left\{u(t):u'''(t),A^3u(t)\in L_2(R_+;H),\ \|u\|_{W_2^3(R_+;H)}=\left(\|u'''\|_{L_2(R_+;H)}^2+\|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Определение 1. *Если вектор-функция $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, тогда ее будем называть регулярным решением уравнения (1).*

Определение 2. *Если при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ существует единственное регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет краевым условиям (2) в смысле $\lim\limits_{t\to0}\|u(t)\|_{H_{5/2}}=0$, $\lim\limits_{t\to0}\|u'(t)-Ku\|_{H_{3/2}}=0$, тогда будем говорить, что краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.*

Как видно, в задаче (1), (2) одно из краевых условий возмущено некоторым оператором. Краевая задача при $K=0$ исследована в работах [3-5] в различных ситуациях. В этой работе мы приведем условия на операторные коэффициенты операторно-дифференциального уравнения и краевых условий, которые обеспечивают регулярную разрешимость данной задачи. С этой целью, обозначим

$$W_{2;K}^{3}(R_+;H)=\left\{u(t):u(t)\in W_2^3(R_+;H),\ u(0)=0,u'(0)=Ku\right\},$$

$$P_0u=u'''-A^3u,\ \ u\in W_{2,K}^{3}(R_+;H),$$

и используя методику [2], докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha>0,\ \beta\in R=(-\infty;+\infty)$. *Тогда при* $x\in H_{5/2}$ *имеет место неравенство*

$$\left\|A^3e^{-\alpha At}\sin\beta At\ x\right\|_{L_2(R_+,H)}^2\le\left(\frac{1}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right)\|x\|_{H_{5/2}}^2.$$

Доказательство. Пусть $y=A^{5/2}x\in H$. Тогда

$$\left\|A^3e^{-\alpha At}\sin\beta At\ x\right\|_{L_2(R_+;H)}^2=\left\|A^{1/2}e^{-\alpha At}\sin\beta At\ y\right\|_{L_2(R_+;H)}^2=$$
$$=\int_0^{+\infty}(A^{1/2}e^{-\alpha At}\sin\beta At\ y,A^{1/2}e^{-\alpha At}\sin\beta At\ y)dt=\int_0^{+\infty}(Ae^{-2\alpha At}\sin^2\beta At\ y,y)\,dt. \tag{3}$$

Используя спектральное разложение оператора A в равенстве (3), имеем:

$$\int_0^{+\infty}\left(Ae^{-2\alpha At}\sin^2\beta At\ y,y\right)dt=\int_0^{+\infty}\left(\int_\mu^{+\infty}\sigma e^{-2\sigma\alpha t}\sin^2\beta\sigma t(dE_\sigma y,y)\right)dt=\int_\mu^{+\infty}\sigma\left(\int_0^{+\infty}e^{-2\sigma\alpha t}\sin^2\beta\sigma t\,dt\right)(dE_\sigma y,y)\cdot$$

Применяя несколько раз формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty}e^{-2\sigma\alpha t}\sin^2\beta\sigma t\,dt=\frac{1}{4\sigma\alpha}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2\sigma\alpha t}\cos2\beta\sigma t\,dt. \tag{4}$$

Учитывая, что $\int_0^{+\infty}e^{-2\sigma\alpha t}\cos2\beta\sigma t\,dt=\frac{\alpha}{2\sigma(\alpha^2+\beta^2)}$, из (4) находим

$$\int_0^{+\infty}e^{-2\sigma\alpha t}\sin^2\beta\sigma t\,dt=\frac{1}{4\sigma\alpha}-\frac{\alpha}{4\sigma(\alpha^2+\beta^2)}\ . \tag{5}$$

Подставляя значение интеграла (5) в выражение (3), имеем:

$$\left\|A^3e^{-\alpha At}\sin\beta At\,x\right\|_{L_2(R_+H)}^2=\int_0^{+\infty}(Ae^{-2\alpha At}\sin^2\beta At\,y,y)dt=\int_\mu^{+\infty}\sigma\cdot\left(\frac{1}{4\sigma\alpha}-\frac{\alpha}{4\sigma(\alpha^2+\beta^2)}\right)(dE_\sigma y,y)=$$
$$=\left(\frac{1}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right)\|y\|_H^2=\left(\frac{1}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right)\left\|A^{5/2}x\right\|_H^2=\left(\frac{1}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right)\|x\|_{H_{5/2}}^2,$$

т.е.

$$\left\|A^3e^{-\alpha At}\sin\beta At\ x\right\|_{L_2(R_+;H)}^2\le\left(\frac{1}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right)\|x\|_{H_{5/2}}^2.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, *тогда*

$$\left\|A^3 e^{-\frac{1}{2}At}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}At\ x\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\le\frac{3}{8}\|x\|^2_{H_{5/2}}.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия 1), 2), причем* $\kappa=\|K\|_{W_2^3(R_+;H)\to H_{5/2}}<1$. *Тогда уравнение* $P_0u=0$ *имеет единственное нулевое решение из пространства* $W^3_{2,K}(R_+;H)$.

Доказательство. Пусть $\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, и $\omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Общее решение уравнения $P_0(d/dt)u(t)=0$ из пространства $W_2^3(R_+;H)$ имеет вид [2,3]

$$u_0(t)=e^{\omega_1At}x_1+e^{\omega_2At}x_2,\quad x_1,x_2\in H_{5/2}.$$

Из условия $u(0)=0$ получаем, что $x_1=-x_2$. Из второго граничного условия следует, что $(\omega_1-\omega_2)Ax_1=K\left(e^{\omega_1At}-e^{\omega_2At}\right)x_1$. Отсюда находим, что

$$x_1=\frac{1}{i\sqrt{3}}A^{-1}K\left(e^{\omega_1At}-e^{\omega_2At}\right)x_1\equiv\Re x_1$$

и имеем, что

$$\|\Re x_1\|_{H_{5/2}}=\left\|A^{5/2}\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(A^{-1}K\left(e^{\omega_1At}-e^{\omega_2At}\right)x_1\right)\right\|_H\le\frac{1}{\sqrt{3}}\|K\|_{W_2^3(R_+;H)\to H_{5/2}}\left\|e^{\omega_1At}x_1-e^{\omega_2At}x_1\right\|_{W_2^3(R_+;H)}. \quad (6)$$

Применяя следствие 1, получаем:

$$\left\|e^{\omega_1At}x_1-e^{\omega_2At}x_1\right\|^2_{W_2^3(R_+;H)}=\left\|A^3\left(e^{\omega_1At}x_1-e^{\omega_2At}x_1\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|\omega_1^3A^3e^{\omega_1At}x_1-\omega_2^3A^3e^{\omega_2At}x_1\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=2\left\|A^3\left(e^{\omega_1At}x_1-e^{\omega_2At}x_1\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=2\left\|A^3\left(e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)At}x_1-e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)At}x_1\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=2\left\|A^3e^{-\frac{1}{2}At}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}iAt}x_1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}iAt}x_1\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=8\left\|A^3e^{-\frac{1}{2}At}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}At\,x_1\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\le8\cdot\frac{3}{8}\|x_1\|^2_{H_{5/2}}=3\|x_1\|^2_{H_{5/2}}.$$

Отсюда имеем

$$\left\|e^{\omega_1At}x_1-e^{\omega_2At}x_1\right\|_{W_2^3(R_+;H)}\le\sqrt{3}\|x_1\|_{H_{5/2}}. \quad (7)$$

Учитывая неравенство (7) в равенстве (6), находим, что

$$\|\Re x_1\|_{H_{5/2}}\le\frac{\kappa}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\|x_1\|_{H_{5/2}}=\kappa\|x_1\|_{H_{5/2}}.$$

Так как $\kappa<1$, то оператор $E-\Re$ обратим в $H_{5/2}$ и получаем, что $x_1=0$, т.е. $u_0(t)=0$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к основным результатам статьи.

Теорема 1. *При* $u \in W^3_{2;K}(R_+;H)$ *и* $\kappa = \|K\|_{W^3_2(R_+;H)\to H_{3/2}} < 1$ *имеет место неравенство*

$$\|P_0 u\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq (1-\kappa)\|u\|^2_{W^3_2(R_+;H)}.$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in W^3_{2;K}(R_+;H)$. Тогда имеем:

$$\|P_0 u\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| \frac{d^3u}{dt^3} - A^3 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| \frac{d^3u}{dt^3} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|A^3 u\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{d^3u}{dt^3}, A^3 u \right)_{L_2(R_+;H)} \qquad (8)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\left(\frac{d^3u}{dt^3}, A^3 u \right)_{L_2(R_+;H)} = -\left(A^{1/2}u''(0), A^{5/2}u(0)\right)_H + \left(A^{3/2}u'(0), A^{3/2}u'(0)\right)_H -$$

$$-\left(A^{5/2}u(0), A^{1/2}u''(0)\right)_H - \left(A^3 u, \frac{d^3u}{dt^3} \right)_{L_2(R_+;H)},$$

т.е.

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{d^3u}{dt^3}, A^3 u \right)_{L_2(R_+;H)} = \|u'(0)\|^2_{H_{3/2}}. \qquad (9)$$

Таким образом, при $\kappa = \|K\|_{W^3_2(R_+;H)\to H_{3/2}} < 1$ с учетом (9) из равенства (8) имеем:

$$\|P_0 u\|^2_{L_2(R_+;H)} = \|u\|^2_{W^3_2(R_+;H)} - \|u'(0)\|^2_{H_{3/2}} = \|u\|^2_{W^3_2(R_+;H)} - \|Ku\|^2_{H_{3/2}} \geq (1-\kappa)\|u\|^2_{W^3_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* A *– положительно-определенный самосопряженный оператор в* H $\left(A = A^* \geq \mu_0 E\right)$, $\kappa = \|K\|_{W^3_2(R_+;H)\to H_{3/2}} < 1$. *Тогда оператор* $P_0 : W^3_{2;K}(R_+;H) \to H_{3/2}$ *изоморфно отображает* $W^3_{2;K}(R_+;H)$ *на* $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $Ker\, P_0 = \{0\}$. Докажем, что для любого $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует $u(t) \in W^3_{2;K}(R_+;H)$, такая, что $P_0 u = f$, т.е. $im\, P_0 = L_2(R_+;H)$.

Обозначим через $f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ и $\hat{f}_1(\xi)$ – преобразование Фурье вектор-функции $f_1(t) \in L_2(R;H)$, $R = (-\infty; +\infty)$, где

$$L_2(R;H) = \left\{ f(t) : \|f\|_{L_2(R;H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2_H \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

Тогда вектор-функция

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\xi^3 t - A^3\right)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi, \quad t \in R = (-\infty; +\infty),$$

удовлетворяет уравнению $P_0(d/dt)u(t) = f(t)$ в $R_+ = (0;+\infty)$ почти всюду. Докажем, что $u_0(t) \in W_2^3(R;H)$. Из теоремы Планшереля следует, что для этого достаточно доказать $A^3 \hat{u}_0(\xi), \xi^3 \hat{u}_0(\xi) \in L_2(R;H)$, где

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) e^{-i\xi t}\, d\xi .$$

Здесь под $W_2^3(R;H)$ понимаем

$$W_2^3(R;H) = \left\{ u(t) : u'''(t), A^3 u(t) \in L_2(R;H), \; \|u\|_{W_2^3(R;H)} = \left(\|u'''\|^2_{L_2(R;H)} + \|A^3 u\|^2_{L_2(R;H)} \right)^{1/2} \right\}$$

Очевидно, что

$$\| A^3 \hat{u}_0(\xi) \|^2_{L_2(R;H)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \| A^3 \hat{u}_0(\xi) \|^2_H d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| A^3 \left(-i\xi^3 E - A^3 \right)^{-1} \hat{f}_1(\xi) \right\|^2_H d\xi \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in R} \left\| A^3 \left(-i\xi^3 E - A^3 \right)^{-1} \right\|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \| \hat{f}_1(\xi) \|^2_H d\xi = \sup_{\xi \in R} \left\| A^3 \left(i\xi^3 E + A^3 \right)^{-1} \right\|^2 \| \hat{f}_1(\xi) \|^2_{L_2(R;H}$$

$$= \sup_{\xi \in R} \left\| A^3 \left(i\xi^3 E + A^3 \right)^{-1} \right\|^2 \| f_1 \|^2_{L_2(R;H)} = \sup_{\xi \in R} \left\| A^3 \left(i\xi^3 E + A^3 \right)^{-1} \right\|^2 \| f \|^2_{L_2(R_+;H)} .$$

Далее, из спектрального разложения оператора A следует, что при любом $\xi \in R$

$$\left\| A^3 \left(i\xi^3 E + A^3 \right)^{-1} \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^3 \left(i\xi^3 + \mu^3 \right)^{-1} \right| \leq \sup_{\mu \geq \mu_0} \left| \mu^3 \left(\xi^6 + \mu^6 \right)^{-1/2} \right| \leq 1 .$$

Поэтому $A^3 \hat{u}_0(\xi) \in L_2(R;H)$. Аналогично доказывается, что $\xi^3 \hat{u}_0(\xi) \in L_2(R;H)$. Следовательно, $u_0(t) \in W_2^3(R;H)$.

Обозначим через $q(t)$ сужение вектор-функции $u_0(t)$ на $[0;+\infty)$, т.е. $q(t) = u_0(t)|_{[0;+\infty)}$. Очевидно, что $q(t) \in W_2^3(R_+;H)$. Поэтому по теореме о следах $q(0) \in H_{5/2}$, $q'(0) \in H_{3/2}$, $q''(0) \in H_{1/2}$. Решение уравнения $P_0 u = f$ будем искать в виде

$$u(t) = q(t) + e^{\omega_1 A t} x_1 + e^{\omega_2 A t} x_2 ,$$

где $\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $x_1, x_2 \in H_{5/2}$ - неизвестные векторы, которые подлежат определению. Из условия $u(t) \in W_{2;K}^3(R_+;H)$ следует, что

$$\begin{cases} q(0) + x_1 + x_2 = 0, \\ q'(0) + \omega_1 A x_1 + \omega_2 A x_2 - K\left(q(t) + e^{\omega_1 A t} x_1 + e^{\omega_2 A t} x_2 \right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $$(E - \Re) x_1 = \psi ,$$ где $\psi = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\omega_2 q(0) - A^{-1} q'(0) + A^{-1} K\left(q(t) - q(0) e^{\omega_2 A t} \right) \right] \in H_{5/2}$. Так как по условию теоремы $\|\Re\|_{H_{5/2}\to H_{5/2}}<1$,то $x_1=(E-\Re)^{-1}\psi\in H_{5/2}$. Теперь можем найти $x_2=-q(0)-(E-\Re)^{-1}\psi\in H_{5/2}$. Таким образом, $u\in W^3_{2;K}(R_+;H)$ и $P_0 u=f$. А с другой стороны,

$$\|P_0u\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|\frac{d^3u}{dt^3}-A^3u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\le 2\|u\|^2_{W_2^3(R_+;H)}.$$

Поэтому по теореме Банаха существует обратный оператор P_0^{-1} и он ограничен. Отсюда следует, что $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984, 284 с.
3. Мирзоев С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР, 1983, т.273, №2, с. 292-295.
4. Mirzoyev S.S., Aliyev A.R. Initial boundary-value problems for a class of third order operator-differential equations with variable coefficients // Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sciences, 2007, v.27, № 1, p. 9-16.
5. Алиев А.Р. О краевой задаче для одного класса операторно-дифференциальных уравнений нечетного порядка с переменными коэффициентами // Доклады РАН , 2008, т.421, №2, с.151-153.

OPERATOR ƏMSALLI BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

A.R.ƏLİYEV, S.F.BABAYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunmuş işdə 3-cü tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinə baxılıb. Sərhəd şərtlərindən biri müəyyən operatorla həyacanlandırılıb. Tənlikdə və sərhəd şərtlərində iştirak edən operator əmsallar üçün kafi şərtlər tapılmışdır ki, bu şərtlər daxilində məsələ korrekt və birqiymətli həll olunur.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH OPERATOR COEFFICIENTS

A.R.ALIYEV, S.F.BABAYEVA

SUMMARY

The paper considers the boundary value problem for the operator-differential equation of the third order, where one of the boundary conditions is indignant by some operator. Sufficient conditions on operator coefficients of the equation and boundary conditions have been determined where the considered problem is correct and univalent.